Τετάρτη, 3 Ιουνίου 2026
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

• η f είναι συνεχής στο Δ και

• $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση $f: R \to R$ είναι ¨1-1¨, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διαστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει $(fog)'(x_o) = f'\big(g(x_o)\big) \cdot g'(x_o)$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = σφx$ είναι παραγωγίσιμη στο $R - \{x|ημx = 0\}$ και ισχύει $(σφx)' = \dfrac{1}{ημ^2x}$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in Δ$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $ξ \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1),

είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2.

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

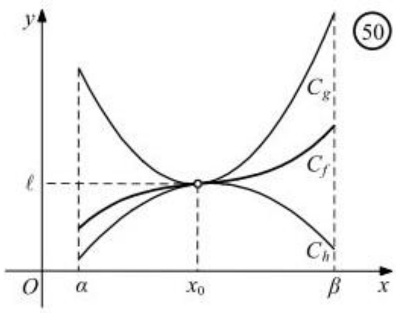
- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0

και

- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$

τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$



A3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

A4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f:(1,+\infty)\to R, \text{ με τύπο } f(x)=2\ln(x-1)$$

και

$$g:[2,+\infty)\to R, \text{ με τύπο } g(x)=\sqrt{x-2}+1.$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f\circ g$.

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x) = \ln(x-2)\,, x\in(2,+\infty)$.

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

B1. Ισχύει $D_h = D_{fog} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} = \{x\ge 2 \mid \sqrt{x-2}+1>1\} =$
$= \{x\ge 2 \mid \sqrt{x-2}>0\} = \{x\ge 2 \mid x-2>0\} = \{x\ge 2 \mid x>2\} = (2,+\infty).$

Άρα $D_h = D_{fog} = (2, +\infty)$ τότε ορίζεται η συνάρτηση h με τύπο

$$h(x) = (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\ln(g(x) - 1) = 2\ln\big(\sqrt{x-2} + 1 - 1\big) =$$

$$= 2\ln\sqrt{x-2} = 2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2) \quad \text{, με } x > 2.$$

B2. **(α' τρόπος)**

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ και για κάθε $x > 2$

ισχύει $h'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως η συνάρτηση h είναι ''1-1'' άρα αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$,

άρα το σύνολο τιμών είναι:

$$h\big((2, +\infty)\big) = \Big(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to +\infty} h(x)\Big) = R$$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) \underset{\substack{x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-2}{=}} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

και $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x-2) \underset{\substack{x\to +\infty\\ u\to +\infty}}{\overset{u=x-2}{=}} \lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

Θεωρούμε την εξίσωση

$h(x) = y$ όπου $x \in D_h = (2, +\infty)$ και $y \in h(D_h) = D_{h^{-1}} = R$

και ισοδύναμα έχουμε:

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $D_{h^{-1}} = R$

(β' τρόπος)

Έχουμε $h(x) = \ln(x-2)$

Έστω $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2)$, τότε:

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Επομένως η συνάρτηση h είναι “1-1” άρα αντιστρέφεται.

Θεωρούμε την εξίσωση $h(x) = y$ όπου $x \in D_h = (2, +\infty)$

και ισοδύναμα έχουμε:

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$, με $y \in R$

Πρέπει επιπλέον $e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$, που ισχύει

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in R$.

B3. Κοντά στο $x_0 = 2$ για $x > 2$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x) = h(x)\frac{f(x)}{x-2} = \ln(x-2)\frac{2\ln(x-1)}{x-2} = 2\ln(x-2)\frac{\ln(x-1)}{x-2}$$

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) \underset{\substack{x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-2}{=}} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

και $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 2^+} \frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-1} = 1$

Άρα, $\displaystyle\lim_{x\to 2} t(x) = \lim_{x\to 2^+} t(x) = -\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με $\kappa, \mu \in R$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

•Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

•Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa = 0$ και

ii) $\mu = 1$

Μονάδες 8

Γ2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (μονάδες 3)

και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, για

κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in R$. (μονάδες 2)

Μονάδες 11

Γ3. Για $\nu \in N$ ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}, \nu \in N$.

ii) Να υπολογίσετε τα I_0, I_1 και I_2.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. i) Αν $\kappa \neq 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (\kappa \cdot x) = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases}$

Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται γιατί τότε η f δεν θα είχε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν $\kappa = 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2+1}$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 0 = 0, & \text{αν } \mu = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\mu \cdot \frac{1}{x}\right) = 0, & \text{αν } \mu \neq 0 \end{cases}$$

Άρα για $\kappa = 0$ η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y = 0$.

ii) Για $\kappa = 0$, ο τύπος της f, γίνεται $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο R, με

$$f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2+1) - \mu x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2+1)^2}$$

Αφού η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στην C_f στο $O(0,0)$ τότε πρέπει

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

Γ2. i) Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$ από (Γ1) ερώτημα,

έχουμε: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ και $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ. Μ.	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = \dfrac{1}{2}$

ii) • Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$,

άρα $f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

• Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_2 = [-1,1]$,

άρα $f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_3 = [1, +\infty)$,

άρα $f(\Delta_3) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$

Επομένως, $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Για την εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{2} + \alpha^2$ έχουμε οτι $f(x) \le \dfrac{1}{2}$ με το $'' = ''$ μόνο για $x = 1$

και $\dfrac{1}{2} + \alpha^2 \ge \dfrac{1}{2}$ με το $'' = ''$ μόνο για $\alpha = 0$.

Άρα, αν $\alpha \ne 0$ η εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη, αφού τότε $\dfrac{1}{2} + \alpha^2 > \dfrac{1}{2}$.

Για $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται: $f(x) = \dfrac{1}{2}$

και έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$ αφού $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Γ3. i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\right)dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+2+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+1}\cdot x^2}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - \frac{0}{2\nu+2} = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii) Χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$

Για $\nu = 0$,: $I_o = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$$= \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_o^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Για τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 χρησιμοποιούμε τον τύπο του ερωτήματος (Γ3)(i).

Για $\nu = 0$, έχουμε:

$$I_o + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_o \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

Για $\nu = 1$, έχουμε:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{2(1-\ln 2)}{4}$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{2-2\ln 2}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1-2+2\ln 2}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g: R \to R$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in R$.
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1,0)$ ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0$$

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $\kappa \in R$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 2

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

i) $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$. (μονάδες 3)

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας y'y χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Ύπαρξη ρίζας

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x, x \in [-1,0]$

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$
  αφού ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in R$ (1),
  άρα για $x = -1$ από την σχέση (1), έχουμε:
  $0 < g(-1) < 1 \Leftrightarrow -1 < g(-1) - 1 < 0$
  και $h(0) = g(0) > 0$
  αφού για $x = 0$ από την σχέση (1), έχουμε $0 < g(0) < 1$

Άρα $h(-1)h(0) < 0$ επομένως από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Μοναδικότητα ρίζας

(α' τρόπος)

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,0]$

Η συνάρτηση h' είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,0]$ άρα από Συνέπειες Θεωρήματος Bolzano η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1,0]$, επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1,0]$.

Επειδή $-1 < 0$ και $h(-1) < 0 < h(0)$ και η h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1,0]$ τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$, την $x = x_1$.

(β' τρόπος)

Αν η εξίσωση $g(x) + x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,0)$, έστω τις $\rho_1, \rho_2 \in (-1,0)$ με $\rho_1 < \rho_2$

- η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$
- $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$

τότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1$, άτοπο, αφού $g'(x) \neq -1$ για κάθε $x \in R$.

Επομένως, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) + x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ την $x = x_1$.

Δ2. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$,

άρα και στο $x_0 = 0$, οπότε ισχύει:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \in R \ (2)$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\big(x(g(x)+x)\big) = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2ημx + εφx - κx}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2ημx}{x} + \frac{ημx}{x}\cdot\frac{1}{συνx} - κ\right) =$$

$$2\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{συν0} - κ = 3-κ$$

Οπότε από την (2) έχουμε: $3-κ=0 \Leftrightarrow κ=3$

Δ3. Για $κ=3$, ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), x\in(-\infty,0) \\ 2ημx + εφx - 3x, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = 2συνx + \frac{1}{συν^2x} - 3 = \frac{2συν^3x - 3συν^2x + 1}{συν^2x}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2συν^3x - 3συν^2x + 1 = 0$

Θέτουμε $συνx = ω$, τότε:

$2ω^3 - 3ω^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(ω-1)(2ω^2-ω-1) = 0 \Leftrightarrow$

$(ω-1)2(ω-1)(ω+\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow$

$2(ω-1)^2\left(ω+\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$(ω-1)^2(2ω+1) = 0 \Leftrightarrow$

Σχήμα Horner

2	−3	0	1	ρ = 1
	2	−1	−1	
2	−1	−1	0	

$ω = 1$ ή $2ω+1=0 \Leftrightarrow ω = -\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{matrix} συνx = 1 \\ x = 2κπ, κ\in Z \\ x\in[0,\frac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 0 \quad ή \quad \left.\begin{matrix} συνx = -\frac{1}{2}, αδύνατη \\ επειδή\ συνx > 0\ για\ κάθε\ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \end{matrix}\right\}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2συν^3x - 3συν^2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (συνx-1)^2\left(συνx+\frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα για $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow f(x) \ge 0$

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

άρα το σύνολο τιμών της f θα είναι:

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

αφού $f(0) = 0$ και

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 2 - \frac{3\pi}{2}$

και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = +\infty$

επειδή $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 > 0$ και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$

αφού $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$ και κοντά στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ για $x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x > 0$

Επειδή $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi$, το οποίο είναι μοναδικό αφού

f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ4. i) Από το ερώτημα Δ1:

για κάθε $x_1 \le x \le 0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x_1) \le h(x) \Leftrightarrow 0 \le g(x) + x$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$

τότε $x^2(g(x) + x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$, αφού f συνεχής.

(α' τρόπος)

ii) Από το ερώτημα Δ3 (i) ισχύει $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

άρα ισχύει $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \left[x_1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή ο άξονας y'y χωρίζει το Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία, τότε ισχύει:

$$\int_{x_1}^{0} |f(x)| dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx = \frac{E(\Omega)}{2} \overset{f(x)\ge 0}{\Longleftarrow} \int_{x_1}^{0} f(x) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \frac{E(\Omega)}{2}$$

Έχουμε: $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x) dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x) dx =$

$$= \left(0 - x_1^3 g(x_1)\right) - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x) dx \ \ (1)$$

Έχουμε $x^2 g(x) + x^3 = f(x) \Leftrightarrow x^2 g(x) = f(x) - x^3$ (2)

Από σχέση (1) και (2) ισχύει:

$$x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)dx + 3\int_{x_1}^{0} x^3 dx =$$

$$= x_1^4 - \frac{3}{2}E(\Omega) + \frac{3}{4}[x^4]_{x_4}^{0} = x_1^4 - \frac{3}{2}E(\Omega) - \frac{3x_1^4}{4}$$

Οπότε $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} - \frac{3}{2}E(\Omega)$

$$\frac{E(\Omega)}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx =$$

$$= -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln|\sigma\upsilon\nu x|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{2}[x^2]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \ln\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{9} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Οπότε $-\frac{3}{2}E(\Omega) = -3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$

(β' τρόπος)

Η $f(x) \geq 0$ στα $[x_1, 0]$ και $[0, f(x_2)]$ από Δ4(i) και Δ3(i) αντίστοιχα και $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ απο Δ3(ii).

Τότε καθώς πρόκειται για χωρία ισεμβαδικά:

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

Τότε

- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \sigma\varphi x - 3x)dx =$

$$= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln\sigma\upsilon\nu x - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi^2}{18} + 2 =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

- $\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)dx = \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x) + x^3)dx =$

$$= \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} =$$

$$= 0 - \left(\frac{x_1^3}{3}g(x_1)\right) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} \overset{g(x_1)=-x_1}{=}$$

$$= \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx \quad (2)$$

Από σχέση (1) και (2):

$$1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}=\frac{x_1^4}{12}-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+3\ln 2-\frac{\pi^2}{2}=\frac{x_1^4}{4}-\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx=\frac{x_1^4}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3$$